関数概念の理解を深める授業開発に関する研究
―シンガポール数学科教科書をもとに―

赤　井　秀　行[1]・中　村　真　里[2]・坂　井　武　司[3]

Study on the development of lessons to deepen understanding of the concept of functions
－Based on Singapore Mathematics textbooks－

AKAI Hideyuki・NAKAMURA Mari・SAKAI Takeshi

日本の算数・数学教育において、関数は小学校段階から高等学校段階まで継続的に学習されている。しかし、近年の全国学力学習状況調査の結果からも、その意味理解において課題があることがうかがえる。そこで本研究では、中学校段階と高等学校段階の接続を円滑にすることをねらいとし、中学校数学科における関数の意味理解に焦点をあてた授業を設計・実践し、その効果を検証することを目的とする。また、授業設計にあたっては、関数の導入段階において、「対応の規則」としての関数を扱っているシンガポールの数学科教科書を援用する。実践の結果、設計された授業は、「規則」としての関数の意味理解を十分に達成するものであった。一方、それら規則を式と相互に関連付けることには課題が残った。また、規則を式と関連付けて理解することが出来た生徒については、その考え方を未習である一次関数に活用することができた。

キーワード：関数・ブラックボックス・シンガポール

１．研究の背景と目的

令和３年度全国学力・学習状況調査において、中学校数学の「関数の意味理解」に関連する設問の正答率は48.4％であり、全16問中10番目という低い水準である。また、同様に「関数の意味理解」について出題された平成30年度の同調査結果においても、正答率は36.3％にとどまっており、関数の意味理解が中学校段階における大きな課題を有する学習内容であることが分かる。さらに、中学校段階から高等学校段階への接続において、関数には新たな意味が追加される。

日本の算数・数学教育において、関数は小学校から、その素地となる学習が始まり、中学校、高等学校へと学習が進められる。表１に小学校から高等学校までの各段階における関数に関連する学習内容を示す。

表１　各段階の関数に関連する学習内容

段階	学習内容
小学校４年生	伴って変わる二つの数量
小学校５年生	簡単な場合の比例
小学校６年生	比例・反比例
中学校１年生	比例・反比例
中学校２年生	一次関数
中学校３年生	関数 $y = ax^2$
数学Ⅰ	二次関数
数学Ⅱ	指数関数・対数関数・三角関数 微分・積分の考え
数学Ⅲ	極限・微分法・積分法

これら各段階において、関数はそれぞれ異なった形で定義されている。まず、小学校段階においては関数という表現は用いず、比例・反比例について図１に示すように定義される。

ともなって変わる２つの量x，yがあって，
xの値が２倍，３倍，……になると，
yの値も２倍，３倍，……になるとき，
yはxに**比例する**といいます。

図１　小学校における比例の定義
（「わくわく算数６」啓林館）

小学校段階では、変化の様子と対応の関係の両方について学習するものの、定義は変化の様子に着目してなされていることが特徴である。

次に、中学校第１学年で比例・反比例について再度学習され、扱われる値が負の数の範囲まで拡張される。この段階で初めて関数という言葉が導入され、図２に示すように定義される。

どんなことがわかったかな
ともなって変わる２つの数量x，yで，xの値を決めるとyの値が決まるとき，yはxの関数であるといえます。

図２　中学校における関数の定義
（「数学１」学校図書）

ここでは、小学校段階とは異なり対応関係から関数が定義される。その後、第２学年で一次関数の一般形について学習される。

高等学校段階では、関数について図３のように示されている。

このように，２つの変数x, yがあって，xの値を定めると，それに対応してyの値がただ１つに定まるとき，yはxの **関数** であるという。
一般に，yがxの関数であることを，文字fなどを用いて，$y=f(x)$ と表す。
また，関数 $y=f(x)$ を単に，**関数** $f(x)$ ということがある。
関数 $y=f(x)$ では，変数xの値がaのとき，それに対応するyの値を$f(a)$で表す。これを $x=a$ における関数$f(x)$の **値** という。

図３　高等学校における関数の定義
（「数学Ⅰ」，啓林館）

ここでは、中学校での定義に加え、xとyの間にある対応の規則fとしても関数を捉えている（日本数学教育学会，2000）。

このように、各段階での関数の定義や意味に違いがみられる。小学校段階から中学校段階への接続については、「小学校段階において、変化と対応の両方を学習したうえで「変化」によって定義し、中学校段階において、「対応」によって定義し直す」というように一定のつながりが見られる。しかし、中学校段階と高等学校段階の接続については、中学校段階において、「規則」としての関数の意味が十分に扱われておらず、生徒にとって段差が存在すると考えられる。

以上の背景を踏まえ、本研究では、中学校段階と高等学校段階の接続を円滑にすることをねらいとし、中学校数学科における関数の意味理解に焦点をあてた授業を設計・実践し、その効果を検証することを目的とする。

２．授業設計

2.1　シンガポールの関数教育

授業設計においては、日本と異なり、「規則」としての関数の意味に基づいて学習が進められている、シンガポールの数学科教科書で用いられる教材を援用する。シンガポールでは、小学校段階において関数としての比例・反比例は扱われず、中学校１年生から関数の学習が始められる。その単元の導入において、図４に示す“Function Machine”が用いられている。日本ではブラックボックス等の名称で同様の教材として紹介されている（照山幸子，2020；村尾和夫，1967）が、それらを活用した実践の検証は十分に行われていない。

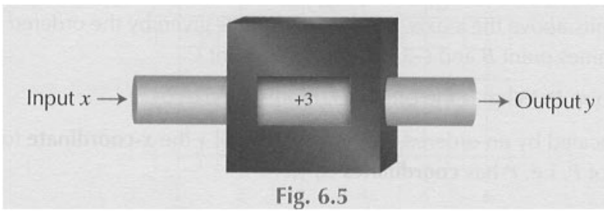
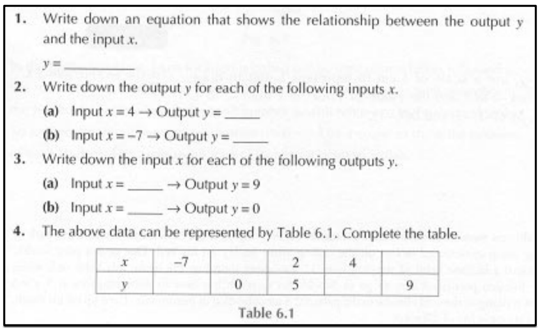


図４　Function Machine
（New Syllabus Mathematics 7th edition 1, shinglee）

この図の導入においては、“a function machine whose function is to add 3 to any input x to produce an output y”と示されており、このFunction machineが、「インプットに対して３加えてアウトプットする」という「規則」を表現していることが分かる。このFunction machineを用い、図５に示すように、「式化する」、「インプットからアウトプットを求める」、「アウトプットからインプットを求める」、「表と関連付けて活用する」という順で

学習が進められている。



1. Write down an equation that shows the relationship between the output y and the input x.
$y =$ ________
2. Write down the output y for each of the following inputs x.
(a) Input $x = 4 \rightarrow$ Output $y =$ _____
(b) Input $x = -7 \rightarrow$ Output $y =$ _____
3. Write down the input x for each of the following outputs y.
(a) Input $x =$ _____ $\rightarrow$ Output $y = 9$
(b) Input $x =$ _____ $\rightarrow$ Output $y = 0$
4. The above data can be represented by Table 6.1. Complete the table.

x	-7		2	4	
y		0	5		9

Table 6.1

図５　Function Machineを活用した問題
（“Mathematics 1”, shinglee）

本研究での授業設計にあたっては、日本の第１学年で学習される対応に基づく関数の定義と、「規則」としての関数の意味を接続するため、第２学年で学習される一次関数の導入において、function machineを活用した授業を設定する。また、生徒にとっての呼称のしやすさを考慮し、実践においては「システム」と表現することとする。

2.2　授業実践の概要

本実践は私立中学校Xの第２学年を対象として実施する。授業概要を以下に示す。

- 学　　校：私立中学校X
- 学　　年：第２学年
- 生　　徒：３学級（68名）
- 実施時期：令和Y年６月下旬

実践は、第２学年の数学科を担当している同校教諭Zが行い、３学級とも同日に実施された。

また、倫理的配慮として調査・分析への協力は回答者（生徒）の自由意思であり、同意が得られなくても成績評価等において何ら不利益を受けることがないことを、事前に本人及び保護者に書面で伝えた。併せて、調査データは論文への取りまとめを含めた研究目的のために使用すること、統計的分析及び質的分析を行うこと、ワークシート等の記述の引用にあたっては個人が特定されうる情報を記述しないことを説明している。

３．授業の展開

3.1　導入場面

導入場面では、「システム」とは何かについて理解することをねらいとして、図６に示すように「どのようなシステムがかくれているだろうか」と発問した。

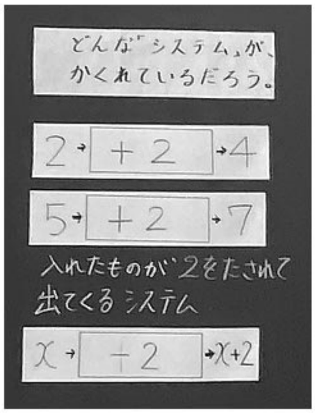


図６　導入場面の板書

ここでは、２組の数の関係によってシステムが決定することをつかめるよう、「２を入れると４が出てくる」と「５入れると７が出てくる」を段階的に提示した。あるクラスでは、以下のような教師と生徒のやり取りが観察された。

教師（以下T）：	このシステムでは、ある数を入れるとある数が出てきます。例えば、２を入れると、４が出てきます。さて、どんなシステムでしょうか？
生徒（以下、S）：	たす２
S：	かける２
T：	ここに、５を入れると何が出てくるかな？
S：	７
S：	10
T：	もし、７だったら
S：	たす２がされる
T：	10だったら
S：	かける２がされる
T：	実は、このシステムでは５を入れると７が出てきます。そうすると赤い四角の中では？
S：	たす２

このように、生徒は「入れる数」と「出てくる数」の間にある「規則」としてシステムを捉えることが

できていた。また、１組目だけでは様々な規則の可能性があり、２組目の関係に基づいて判断することで１つの規則に決定されるという点について、理解できている様子であった。

この後、展開場面で式化するための素地として、「入れる数」をxとし、文字を用いて「出てくる数」を表現した。

3.2　展開場面

展開場面では、一次関数の一般形へとつなげることをねらいとし、２つの問題を扱った。まず、導入と同様に、「２を入れると６が出てくる」と示し、生徒からは「かける３する」、「たす４する」との考えが出された。その後、「５を入れると15出てくる」という関係を示し、図７に示すように「かける３される」というシステムを見出した。

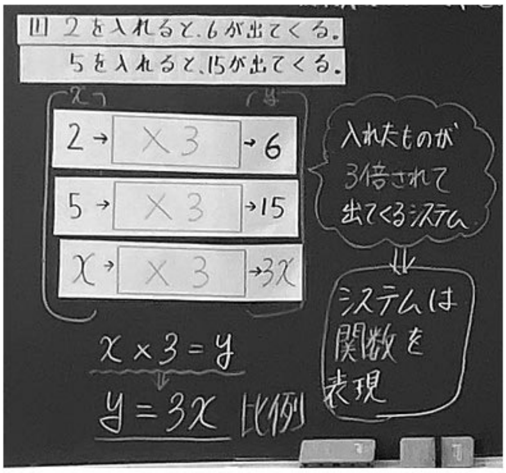


図７　展開場面の板書-①

次に「入れた数」をx、「出てきた数」をyとして、xとyの関係を表す式を考える活動を行った。生徒からは「x×３＝y」という考えが多くあげられ、全体交流を通じてy＝3xという表現に修正した。さらに、既習事項の復習を通じ、この関係が比例関係であること及び、比例関係であれば「yはxの関数である」といえることを確認した。このことから、「入れた数」と「出てくる数」の間にある規則としてのシステムが、「関数」を表現していることを確認した。

次に、図８に示すように、「２を入れると８が出てくる。５を入れると17が出てくる」という、一次関数の一般形によってあらわされるシステムを出題した。発問にあたっては、一般形を初めて学習する生徒の実態を踏まえ、導入で扱った「＋２」と、展開場面の前半で扱った「×３」を組み合わせることで問題解決できるよう工夫した。

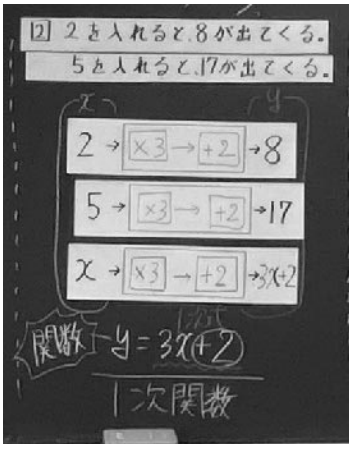


図８　展開場面の板書-②

１組目を示した段階では、これまでの学習から、「これだけではわからない」と発言する生徒も見られた。その後２組目を提示し、個人解決・グループ解決へと移った。そして、全体交流を通じて「３をかけて２をたす」というシステムを確認した。ここでは、□の中に２つの演算を含めていいのかということに迷い、解決に至らないグループも見られた。

3.3　まとめ場面

このあと、入れる数をxとして出てくる数を文字で表現し、「y＝3x＋２」という式での表現を確認した。ここで、生徒はy＝3xと比較することを通じ、「関数」ではあるが、これまで学習していた「比例」とは異なることを確認した。そして、図９に示すように「一次関数」という名称を示し、比例定数及び定数について導入した。

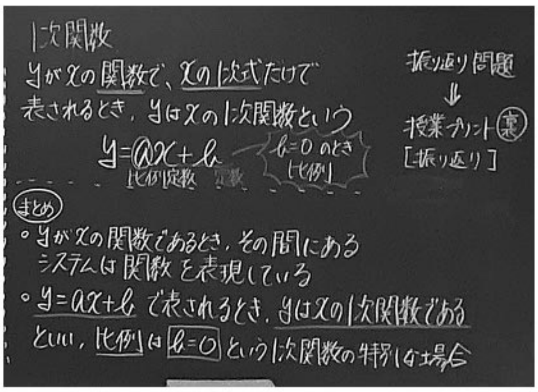


図９　まとめ場面の板書

さらに、本時全体のまとめを行った。ここでは、

「yがxの関数である」という、第１学年で学習した定義に基づき、本時に学習したxとyの対応の規則を表すシステムが、関数を表現していることを確認した。

４．分析

実践授業の効果を検証するため、事前及び事後調査を実施した。

4.1　事前調査の結果と分析

事前調査では、第１学年で学習している関数の定義についての定着度を調査した。以下に示す３つの選択肢の中から、「yがxの関数であるモノを全て選択せよ」という問題について調査を行った。なお、調査において、選択肢中に誤字脱字のあった選択肢は除外した。

①　１辺の長さが$x$cmの正方形の面積は$y$cm²である。
②　周囲の長さが$x$cmの長方形の面積は$y$cm²である。
③　12kmの道を時速$x$kmで歩くと、y時間かかる。

各選択肢の反応率を表２、解答類型ごとの反応率を表３に示す。

表２　選択肢ごとの反応率（n＝65）

選択肢	反応率（%）
①	83.3
②	23.3
③	80.0

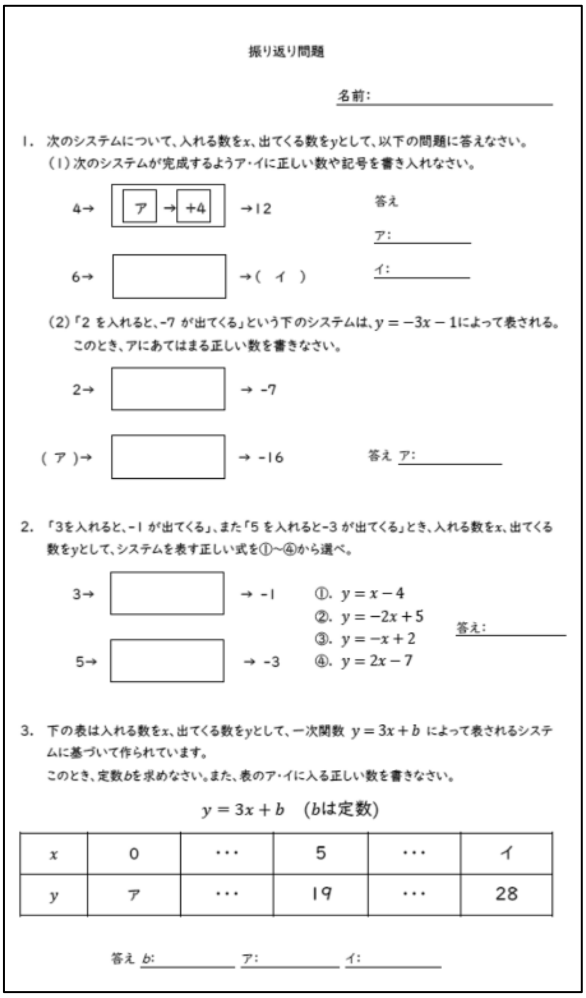
表３　解答類型（n＝65）

解答類型	反応率（%）
①	13.8
②	3.1
③	6.2
①・②	6.2
①・③（正答）	55.4
②・③	6.2
①・②・③	6.2
無回答	3.1

約55%の生徒が正しくすべての関数関係を選択できており、誤った②を選択している生徒は約23.3%であった。

4.2　事後調査の結果と分析

事後調査は、実践授業終了後に実施した。図10に事後調査問題を示す。


振り返り問題

名前:

1. 次のシステムについて、入れる数をx、出てくる数をyとして、以下の問題に答えなさい。
(1) 次のシステムが完成するようア・イに正しい数や記号を書き入れなさい。

4→ ア → +4 →12　　答え　ア:　イ:
6→ →（ イ ）

(2)「2 を入れると、-7 が出てくる」という下のシステムは、$y=-3x-1$によって表される。
このとき、アにあてはまる正しい数を書きなさい。

2→ → -7
（ ア ）→ → -16　　答え ア:

2. 「3を入れると、-1 が出てくる」、また「5 を入れると-3 が出てくる」とき、入れる数をx、出てくる数をyとして、システムを表す正しい式を①～④から選べ。

3→ → -1
5→ → -3

①. $y=x-4$
②. $y=-2x+5$
③. $y=-x+2$
④. $y=2x-7$

答え:

3. 下の表は入れる数をx、出てくる数をyとして、一次関数 $y=3x+b$ によって表されるシステムに基づいて作られています。
このとき、定数bを求めなさい。また、表のア・イに入る正しい数を書きなさい。

$y=3x+b$　(bは定数)

x	0	…	5	…	イ
y	ア	…	19	…	28

答え b:　ア:　イ:

図10　事後調査問題

①　問１.(1)に関する分析

問１.(1)はシステムの意味についての理解の程度を検証するための問題である。表４に解答類型別の生徒の割合を示す。

表４　問１.⑴の解答類型別の回答率（n＝68）

１.⑴.アの解答	１.⑴.イの解答	反応率（%）
×２ （２を含む）	16	57.4
	他	10.3
＋４ （４を含む）	14	17.6
	他	2.9
他の解答		10.3
無回答		1.5

問１.⑴.アについては「×２」を、問１.⑴.イについては「16」を正答として想定していた。しかし、表４に示すように17.6%の生徒が問１.⑴.アについては「＋４」と解答している。この場合でも、「４＋４＋４＝12」となり、システムは成立する。上述のように実践授業においては、「加法・減法のシステム→乗法のシステム」と学習し、それらを組み合わせることで一次関数の一般形を表す「乗法と加法・減法」の組み合わせによるシステムを理解できるように指導した。しかし、加法・減法を連ねるような表現は想定されておらず、十分に指導されていなかったため、このような解答へとつながったと考えられる。

しかし、「入れる数」と「出てくる数」の間にある「規則」というシステムの意味を踏まえると、問１.⑴.アにおいて「×２」及び「＋４」のいずれの場合においても規則は成り立っており、88.2%の生徒が「規則」としてのシステムの意味を理解していると解釈することができる。また、75%の生徒がシステムを他の「入れる数」と「出てくる数」の関係に正しく適用することができている。

さらに、事前調査での正答・誤答と、事後調査問１.⑴.アの正答・誤答についてχ^2検定を行った結果を表５に示す。

表５　事前調査と事後調査問１.⑴.アのχ^2検定

		事後調査問１.⑴.ア		計
		正答	誤答	
事前調査	正答	28	1	29
	誤答	29	7	36
計		57	8	65

結果として、期待値５未満のセルが全てのセルの20%を超えたため、フィッシャーの検定を行った。その結果、有意差（p<.05）が認められなかった。つまり、事前調査における正答・誤答と、事後調査問１.⑴.アにおける正答・誤答に関連はないと考えられる。よって、第１学年で学習する関数の定義の理解の程度に関わらず、本実践を通じた「規則」としてのシステムの意味を理解することができているといえる。

②　問１.⑵に関する分析

次に、問１.⑵は式を用いて表現されたシステムを理解することができているかを検証する問題である。回答類型別の生徒の割合を表６に示す。なお、「他の解答」とはそれぞれ１人だけにみられた誤答について、その人数を合計した値である。

表６　問１.⑵の解答類型別の反応率（n＝68）

１.⑴の解答	反応率（%）
５（正答）	55.9
－５	2.9
－７	7.4
他の解答	13.2
無回答	20.6

－５という解答は負の数の乗法に関する計算の誤りであると考えられ、－７という解答は、「２を入れると７が出てくる」という関係から、「入れた数から９をひいて出す」というシステムであると考えた結果と解釈することができる。よって、正答した生徒と負の数に関する計算間違いと考えられる生徒を合わせた、全体の約58.8%が式で表現されたシステムを理解することができていると考えられる。これは、問１.⑴で正しくシステムを理解していた割合（88.2%）と比べると、明らかに減少している。

本実践では、「システムを考える」ということを中心的な課題としており、システムを式で表したり、式で表されたシステムを読み取ったりするという活動は十分に行っていない。その為、このような２つの問題間での理解の程度に差が生じたと考えられる。

③　問２に関する分析

問２は２組の数の関係をもとに、共通するシステムを表す正しい式を選択する問題である。ここでは、「２組の数の関係によってシステムが決定される」ことが理解できているかについての検証をねらいとしている。「３を入れると－１が出てくる」という関

係については、全ての選択肢においてシステムが成立するように問題を設定している。解答類型別の生徒の割合を表７に示す。

表７　問２の解答類型別の反応率（n＝68）

解答類型	反応率（%）
①	8.8
②	7.4
③（正答）	42.6
④	11.8
複数を選択している	8.8
無回答	20.6

正しく解答できた生徒は全体の42.6%であった。複数の選択肢を選択した生徒もいたことから、「２組の数の関係によってシステムが決定される」ということについては、十分な理解に達していないと考えられる。授業実践の中では、加法又は乗法の１つだけの演算を用いるシステムにおいて、「２組の数の関係によってシステムが決定される」という点を学習してきた。事後調査の設問は、一次関数の一般形で構成されているため、生徒にとって困難さが増したと考えられる。あわせて、問１.(2)での正答・誤答と、問２の正答・誤答についてχ^2検定を行った結果を表８に示す。

表８　問１.(2)と問２のχ^2検定

		問２		計
		正答	誤答	
問１.(2)	正答	25	15	40
	誤答	4	24	28
計		29	39	68

結果として、χ^2値は15.65となり、有意水準５%における自由度１の臨界値は3.84であるので、有意な差があると判断できる。つまり、問１.(2)における正答・誤答と、問２における正答・誤答には関連があると考えられる。この結果から、選択肢が式で表現されたシステムであることも、生徒にとっての困難さにつながったと考えられる。

④　問３に関する分析

問３はシステムの考え方を活用し、未習内容である一次関数の一般形について、式による表現と表を関連付けることができるかを検証する問題である。切片bについての解答類型別の生徒の割合を表９に示す。

表９　問３bの解答類型別の反応率（n＝68）

解答類型	反応率（%）
４（正答）	39.7
−４	1.5
14	1.5
２	1.5
無回答	55.9

さらに、問３bと問１.(2)の正答・誤答についてχ^2検定を行った結果を表10に示す。

表10　問１.(2)と問３bのχ^2検定

		問３b		計
		正答	誤答	
問１.(2)	正答	25	15	40
	誤答	2	26	28
計		27	41	68

結果として、χ^2値は21.08となり、有意水準５%における自由度１の臨界値は3.84であるので、有意な差があると判断できる。つまり、問１.(2)における正答・誤答と、問３bにおける正答・誤答には関連があると考えられる。上述の問２と同様に、システムを式と結び付けることの困難さが、その活用にも影響していると考えられる。

次に、表中のア及びイについての解答類型ごとの生徒の割合を表11に示す。

表11　問３ア・イの解答類型別の反応率（n＝68）

ア		イ	
解答類型	反応率(%)	解答類型	反応率(%)
４（正答）	30.9	８（正答）	36.8
7	4.4	6	4.4
その他	11.8	その他	5.9
無回答	52.9	無回答	52.9

ア・イについては計算の誤りも考えられるため、ア・イの少なくともいずれか一方に正答していることで、表と式から「規則」を捉え、それを活用でき

ていると解釈する。この場合、ア・イの少なくとももいずれか一方に正答している生徒は、29名（約42.6%）であった。

さらに、問３bと問３ア・イの正答・誤答についてχ^2検定を行った結果を表12に示す。

表12　問３bと問３ア・イのχ^2検定

		問３ア・イ		計
		正答	誤答	
問３b	正答	27	0	27
	誤答	2	39	41
計		29	39	68

結果として、χ^2値は60.22となり、有意水準５％における自由度１の臨界値は3.84であるので、有意な差があると判断できる。やはり、bの値を正しく求められていない場合、システムを活用し、一方の値から他方の値を求めることができていないことが分かる。

５．考察とまとめ

以上の分析を通じ、以下の３点が明らかとなった。

①．設計された実践は、「規則」としての関数理解の素地となる、「システム」の意味理解を達成するものであった。

②．設計された実践は、「規則」を式で表現したり、式で表現された「規則」を理解したりする水準には、十分に到達できなかった。

③．システムで表現される規則と式を結び付けて理解することが、「規則」についての考え方を一次関数へ活用するうえで重要である。

本研究の目的である、高等学校段階における「規則」として関数を捉えるということとの接続については、①に示すように達成することができた。しかし、１時間という限られた時間の中で、十分に規則と式を関連付けた指導を行うことが出来なかった。上述の分析にあるように、１.(2)の正答・誤答がその後の問題に影響を与えていることから、「式」とシステムの関連付けを含めた指導計画を設計していくことが今後の課題である。ただし、本実践は一次関数の単元冒頭に位置付けられている。この授業の後は、通常の指導計画に則した場面・式・表・グラフを関連付けた学習が進められる。それらの学習の中で、②に関する課題は改善されていくと考えられる。

さらに、「規則」として関数を捉えることで、未習である段階でも約40%程度の生徒が問題解決に至っていることから、今後の一次関数の学習において生徒の理解を助ける効果も期待できる。また、事前調査と事後調査１.(1)の間に関連がないという分析結果から、本実践は第１学年の「比例・反比例」の学習との順序に依存せず、取り入れることが可能である。

注

１　九州ルーテル学院大学

２　ルーテル学院中学・高等学校

３　京都女子大学

引用・参考文献

藤原耕二他，数学Ⅰ，啓林館，2022.

池田敏和他，数学１，学校図書，2020.

Joseph Yeo他，New Syllabus Mathematics 7th edition 1, Shinglee，2017.

日本数学教育学会編, 和英／英和　算数･数学用語活用辞典，東洋館出版社，2000.

文部科学省，小学校学習指導要領解説算数編，日本文教出版株式会社，2018.

文部科学省，中学校学習指導要解説数学編，日本文教出版株式会社，2018.

文部科学省，高等学校学習指導要領解説理数編，東京書籍，2019.

村尾和夫，ブラックボックスを使った関数の指導，日本数学教育会誌臨時増刊, 總会特集号，49，pp.199-200，1967.

清水静海他，わくわく算数６，啓林館，2019.

照山幸子，関数とはブラックボックスである，数学教室，数学教育協議会，66(10)，pp.12-15，2020.

付記　本研究は京都女子大学令和４年度「研究経費助成」の助成をうけています。